ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG CÔNG CỪ

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ SINH BỞI CÁC ĐA THỨC ĐẠI SỐ BA BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG CÔNG CỪ

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ SINH BỞI CÁC ĐA THỨC ĐẠI SỐ BA BIẾN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề bất đẳng thức có vai trò rất quan trọng ở bậc trung học phổ thông. Bất đẳng thức không chỉ là đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số và Giải tích mà còn là công cụ đắc lực trong nhiều lĩnh vực khác của toán học. Ta đã biết rằng các bất đẳng thức trong đa thức đã được nhiều nhà toán học khảo sát như Newton, Lagrange, Berstein, Markov, Kolmogorov, Landau, ... Các bất đẳng thức dạng này cũng có thể chứng minh được bằng nhiều phương pháp khác nhau của hình học như phương pháp véctơ và phương pháp tọa độ, phương pháp số phức,...
Tuy nhiên, các dạng bất đẳng thức ứng với lớp đa thức tổng quát thì người ta cần đến các công cụ của giải tích (tính lồi, lõm) để khảo sát chúng.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi và nâng cao nghiệp vụ của bản thân về chuyên đề bất đẳng thức và cực trị sinh bởi các đa thức đại số ba biến, tôi chọn đề tài luận văn "Bất đẳng thức và cực trị sinh bởi các đa thức đại số ba biến".

Luận văn này nhằm cung cấp một số dạng bất đẳng thức và cực trị sinh bởi các đa thức đại số cùng một số dạng liên quan.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 3 chương.

Chương 1. Đa thức và các hệ thức liên quan.

Chương 2. Các bất đẳng thức sinh bởi các đa thức đại số ba biến.

Chương 3. Các dạng toán cực trị sinh bởi các đa thức đại số ba biến.

Mục đích của đề tài luận văn là khảo sát một số lớp bất đẳng thức và cực trị sinh bởi các đa thức đại số ba biến và xét các mở rộng của chúng để áp dụng trong khảo sát các bài toán cực trị liên quan.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu luận văn. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các Thầy Cô trong khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Đồng thời, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới gia đình và các bạn đồng môn đã luôn giúp đỡ và động viên tôi trong thời gian học tập và trong quá trình hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, 12 tháng 05 năm 2019.

Tác giả

Dương Công Cừ

Chương 1. Đa thức và các hệ thức liên quan

Mục đích của chương này là trình bày một số bất đẳng thức cổ điển liên quan đến đa thức nói chung, đa thức bậc ba nói riêng và xét một số hệ thức cơ bản. Một phần của chương này được dành để nêu về đa thức bậc ba và các hệ thức trong tam giác. Các kết quả chính của chương được tham khảo từ các tài liệu [2], [3].

1.1 Một số bất đẳng thức cổ điển liên quan đến đa thức

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathcal{A}$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta gọi đa thức bậc n biến x là một biểu thức có dạng

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0), \tag{1.1}$$

trong đó các $a_i \in \mathcal{A}$ được gọi là hệ số, a_n là hệ số cao nhất và a_0 là hệ số tự do của đa thức.

Bậc của đa thức $f_n(x)$ là số mũ cao nhất của lũy thừa có mặt trong (1.1) và được ký hiệu là $\deg(f)$. Khi đó nếu trong (1.1) $a_n \neq 0$ thì $\deg(f) = n$.

Nếu $a_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$ và $a_0 \neq 0$ thì ta có bậc của đa thức là 0.

Nếu $a_i = 0,\ i = 0, \ldots, n$ thì ta coi bậc của đa thức là $-\infty$ và gọi đa thức không (nói chung thì người ta không định nghĩa bậc của đa thức không). Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số lấy trong vành $\mathcal{A}$ được ký hiệu là $\mathcal{A}[x]$.

Khi $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ là một trường thì vành $\mathcal{K}[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, hoặc $\mathcal{A} = \mathbb{Q}$ hoặc $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. Khi đó, ta có các vành đa thức tương ứng là $\mathbb{Z}[x],\ \mathbb{Q}[x],\ \mathbb{R}[x],\ \mathbb{C}[x]$.

Các phép tính trên đa thức

Cho hai đa thức

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Ta định nghĩa các phép tính số học

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0,$$
$$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0,$$
$$f(x)g(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

trong đó

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Các tính chất cơ bản

Định lý 1.1. *Giả sử $\mathcal{A}$ là một trường, $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ là hai đa thức của vành $\mathcal{A}[x]$, thế thì bao giờ cũng có cặp đa thức duy nhất $q(x)$ và $r(x)$ thuộc $\mathcal{A}[x]$ sao cho*

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \qquad \text{với } \deg r(x) < \deg g(x).$$

Nếu $r(x) = 0$ ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Giả sử a là phần tử tùy ý của vành $\mathcal{A}$, $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ là đa thức tùy ý của vành $\mathcal{A}[x]$, phần tử $f(a) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i a^i$ có được bằng cách thay x bởi a được gọi là giá trị của $f(x)$ tại a.

Nếu $f(a) = 0$ thì ta gọi a là nghiệm của $f(x)$. Bài toán tìm các nghiệm của $f(x)$ trong $\mathcal{A}$ gọi là giải phương trình đại số bậc n trong $\mathcal{A}$.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0).$$

Định lý 1.2. *Giả sử $\mathcal{A}$ là một trường, $a \in \mathcal{A}$ và $f(x) \in \mathcal{A}[x]$. Dư số của phép chia $f(x)$ cho $x - a$ chính là $f(a)$.*

Định lý 1.3. *a là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x-a)$. Giả sử $\mathcal{A}$ là một trường, $a \in \mathcal{A}$, $f(x) \in \mathcal{A}[x]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó a là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x - a)^{m+1}$.*

Trong trường hợp $m = 1$ thì ta gọi a là nghiệm đơn còn khi $m = 2$ thì a được gọi là nghiệm kép. Số nghiệm của một đa thức là tổng số các nghiệm của đa thức đó kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy, người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

Lược đồ Horner

Giả sử

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{A}[x]$$

(với $\mathcal{A}$ là một trường). Khi đó thương gần đúng của $f(x)$ cho $(x - a)$ là một đa thức có bậc bằng $n - 1$, có dạng

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

trong đó

$$b_{n-1} = a_n,\ b_k = ab_{k+1} + a_{k+1},\ k = 0, \ldots, n-2,$$

và dư số $r = ab_0 + a_0$.

Định lý 1.4 (Định lí Viète)**.**
a. Giả sử phương trình

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.2}$$

có n nghiệm (thực hoặc phức) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *thì*

$$\begin{cases} E_1(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ E_2(x) := x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ E_n(x) := x_1x_2\ldots x_n & = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases} \tag{1.3}$$

b. Ngược lại nếu các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *thỏa mãn hệ trên thì chúng là nghiệm của phương trình* (1.2). *Hệ* (1.3) *có n thành phần và ở vế trái của thành phần thứ k có* C_n^k *số hạng.*

c. Các hàm $E_1(x), E_2(x), \ldots, E_n(x)$ *được gọi là hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp Viète bậc* $1, 2, \ldots, n$*, tương ứng.*

Định lý 1.5. *Mỗi đa thức thực bậc n đều có không quá n nghiệm thực.*

Hệ quả 1.1. *Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.*

Hệ quả 1.2. *Nếu đa thức có bậc $\leq n$ mà nhận cùng một giá trị như nhau tại $n+1$ điểm phân biệt của đối số thì đó là đa thức hằng.*

Hệ quả 1.3. *Hai đa thức bậc $\leq n$ mà nhận $n+1$ trùng nhau tại $n+1$ điểm phân biệt của đối số thì chúng đồng nhất bằng nhau.*

Định lý 1.6. *Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc n và có hệ số chính (hệ số cao nhất) $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích (duy nhất) thành nhân tử dạng*

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{m}(x - d_i) \prod_{k=1}^{s}(x^2 + b_k x + c_k)$$

với $d_i,\ b_k,\ c_k \in \mathbb{R}$, $2s + m = n,\ b_k^2 - 4c_k < 0,\ s, m, n \in \mathbb{N}^*$.

Định nghĩa 1.2. 1) Mọi nghiệm x_0 của đa thức (1.1) đều thỏa mãn bất đẳng thức

$$|x_0| \leq 1 + \frac{A}{|a_0|}, \quad A = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

2) Nếu a_m là hệ số âm đầu tiên của đa thức (1.1) thì số $1 + \sqrt[n]{\dfrac{B}{a_m}}$ là cận trên của các nghiệm dương của đa thức đã cho, trong đó B là giá trị lớn nhất của môđun các hệ số âm.

3) Khi đa thức $f_n(x)$ dạng (1.1) viết dưới dạng $f_n(x) = g(x)q(x)$ với $\deg(g) > 0$ và $\deg(q) > 0$ thì ta nói g là ước của $f_n(x)$ và ta viết $g(x)|f_n(x)$ hay $f_n(x) \vdots g(x)$.

Nếu $g(x)|f(x)$ và $g(x)|h(x)$ thì ta nói $g(x)$ là ước chung của $f(x)$ và $h(x)$.

Nếu hai đa thức $f(x)$ và $h(x)$ chỉ có ước chung là các đa thức bậc 0 thì ta nói rằng chúng nguyên tố cùng nhau và viết $(f(x), h(x)) = 1$.

Định lý 1.7. *Điều kiện cần và đủ để hai đa thức $f(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau là tồn tại cặp đa thức $u(x)$ và $v(x)$ sao cho*

$$f(x)u(x) + h(x)v(x) \equiv 1.$$

Tính chất 1.1. Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau và các đa thức $f(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì các đa thức $f(x)$ và $g(x)h(x)$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Tính chất 1.2. Nếu các đa thức $f(x), g(x), h(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x)h(x)$ chia hết cho $g(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Tính chất 1.3. Nếu đa thức $f(x)$ chia hết cho các đa thức $g(x)$ và $h(x)$ với $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)h(x)$.

Tính chất 1.4. Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $[f(x)]^m$ và $[g(x)]^n$ sẽ nguyên tố cùng nhau với mọi m, n nguyên dương.

Một số bất đẳng thức đại số cơ bản

Trong phần này trình bày các bất đẳng thức liên quan đến các đa thức đại số cơ bản.

Định lý 1.8 (Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân). *Giả sử* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các số không âm. Khi đó*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{1.4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Bất đẳng thức (1.4) có trong nhiều tài liệu bằng tiếng Việt và được gọi là bất đẳng thức Côsi (Cauchy). Tuy nhiên, trong các tài liệu nước ngoài bất đẳng thức trên có tên tiếng Anh là "AM-GM Inequality", cho nên về sau, ta gọi bất đẳng thức (1.4) là "Bất đẳng thức giữa trug bình cộng và trung bình nhân".

Bất đẳng thức (1.4) khá quen thuộc với đa số bạn đọc và đã được chứng minh trong nhiều tài liệu bằng tiếng Việt, nên chúng tôi sẽ không trình bày chứng minh mà chỉ xét ví dụ áp dụng.

Ví dụ 1.1. Cho các số không âm x, y, z. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \geq x^{1/2} y^{1/3} z^{1/6}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{3x + 2y + z}{6} \geq \sqrt[6]{x^3 y^2 z}.$$

Ta viết vế trái của bất đẳng thức trên ở dạng

$$\frac{3x + 2y + z}{6} = \frac{x + x + x + y + y + z}{6}.$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$\frac{3x + 2y + z}{6} = \frac{x + x + x + y + y + z}{6} \geq \sqrt[6]{x^3 y^2 z}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.